

## COMPARACIÓN DE ECUACIONES DE INFILTRACIÓN EN LA MODELACIÓN DE LA FASE DE AVANCE DEL RIEGO POR GRAVEDAD

Sebastián Fuentes<sup>1\*</sup>; Carlos Chávez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigaciones del Agua, Departamento de Ingeniería de Riego y Drenaje, Universidad Autónoma de Querétaro. Cerro de las Campanas SN, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, México.

sebastian.fuentes@uaq.mx (S.F.) - 4422053566 (\*Autor de correspondencia)

---

### Resumen

El uso de ecuaciones de infiltración con parámetros físicos representativos del suelo al inicio del riego por melgas determina la lámina de agua aplicada y los tiempos de riego necesarios para alcanzar la longitud máxima de la melga. El modelo hidrodinámico utilizado emplea un esquema de celdas oblicuas en diferencias finitas implícitas para resolver las ecuaciones en la fase de avance. Para representar el proceso de infiltración del agua en el suelo, se utilizan dos ecuaciones: la ecuación de Green y Ampt, basada en principios físicos y la ecuación empírica de Kostiaikov. La primera proporciona una visión más detallada del proceso de infiltración, mientras que la segunda es ampliamente utilizada para estimar la infiltración en modelos simplistas. Los resultados resaltan la importancia de considerar parámetros del suelo y utilizar ecuaciones de infiltración basadas en principios físicos, como la ecuación de Green y Ampt o la ecuación de Richards, para obtener una representación precisa del avance en el riego por melgas y comprender de manera más profunda la dinámica del contenido de humedad durante riegos sucesivos.

**Palabras claves:** Déficit de riego, Modelación del flujo de agua, Proceso de infiltración.

## Introducción

Más del 90% de las áreas de riego en todo el mundo utilizan el método de riego por gravedad, pero su rendimiento es afectado negativamente por problemas de operación de los regadores y un mal diseño del riego (Akbari *et al.*, 2018; Khasraghi *et al.*, 2015). Debido a que se infiltra una parte del agua que fluye a través de la superficie, se deben desarrollar modelos que tomen en cuenta la cantidad de agua que se está infiltrando y como está se distribuye en el perfil del suelo (S. Fuentes, Fuentes, *et al.*, 2022). Este proceso de infiltración varía con el tiempo y las características de la parcela, lo que hace que el flujo en la superficie sea inestable (Golestani Kermani *et al.*, 2019). Durante este método de riego, se pueden identificar tres fases fundamentales: la fase de avance, la fase de almacenamiento y la fase de recesión, que han sido estudiadas con diversos modelos para entender el fenómeno (Chávez y Fuentes, 2019). La fase de avance es de relevancia debido a que es la primera fase del riego y que en las fases subsecuentes suelen haber variaciones de gasto que hacen que se pierda representatividad al momento de realizar pruebas de riego.

Existen diferentes formas de modelar el riego por gravedad, que incluyen modelos del tipo empírico, donde se ajustan funciones potenciales que relacionan la longitud de avance con el tiempo. También existen modelos matemáticos que se basan en las ecuaciones de Saint-Venant, que contienen la ecuación de continuidad y la ecuación de momento, los modelos matemáticos para simular el riego superficial se clasifican en cuatro grupos principales: el modelo de balance de volumen, el modelo de onda cinemática, el modelo de cero inercia y el modelo hidrodinámico (Ebrahimian y Liaghat, 2011).

El modelo hidrodinámico es el que se utiliza con menor frecuencia. Se ha utilizado en programas como SIRMOD (Walker, 2003) y SISCO (Gillies y Smith, 2015), estos programas utilizan la ecuación de Kostikov-Lewis para simular el flujo subsuperficial del agua, mientras que en otros modelos se utilizan la ecuación de Kostikov (Singh y Bhallamudi, 1996), la ecuación de infiltración de Green y Ampt, basada en parámetros físicos (S. Fuentes, Fuentes, *et al.*, 2022; Saucedo *et al.*, 2015), y modelos que incorporan una solución analítica para la infiltración en un suelo con un manto freático somero para la fase de avance del riego por melgas (Saucedo *et al.*, 2005).

Las principales diferencias entre los modelos son la cantidad de parámetros en las ecuaciones, los métodos de solución y las ecuaciones de infiltración acopladas. Es importante mencionar que la mayoría de las soluciones presentadas utilizan principalmente las ecuaciones de Kostikov y Kostikov-Lewis. Sin embargo, estas funciones no incluyen el uso de parámetros físicos representativos del suelo en sus variables y que se puedan adaptar temporalmente sin tener que realizar tantas pruebas de riego.

El objetivo de este trabajo es comparar la ecuación de infiltración de Kostikov y la de Green y Ampt para mostrar las diferencias del gasto óptimo de riego mediante la solución

del modelo hidrodinámico completo de las ecuaciones de Saint-Venant, empleando un esquema de celdas oblicuas en diferencias finitas para abordar la fase inicial del riego.

## Materiales y Métodos

### Flujo superficial

En este trabajo, se empleó un enfoque de modelado hidrodinámico completo para el flujo superficial y se compararon dos ecuaciones de infiltración para el flujo subsuperficial. La ecuación de continuidad para el riego por melgas se expresó de la siguiente manera:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = V_i \quad (1)$$

La ecuación de cantidad de movimiento para el riego por melgas se presenta en una forma recomendada (Saucedo *et al.*, 2005):

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2hq \frac{\partial q}{\partial x} + (gh^3 - q^2) \frac{\partial h}{\partial x} + gh^3 (J - J_o) + \beta qh \frac{\partial l}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

donde  $h$  representa la profundidad del agua y  $q(x,t) = U(x,t)h(x,t)$  es el gasto unitario o el gasto por unidad de ancho de la melga. La coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua en la melga se denota por  $x$ , mientras  $t$  representa el tiempo.  $U$  es la velocidad promedio y  $\beta = U_x/U$  es un parámetro adimensional donde  $U_x$  es la proyección en la dirección de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración.  $V_i = \partial l(x,t)/\partial t$  es la velocidad de infiltración, es decir, el volumen de agua infiltrada por unidad de ancho por unidad de longitud de la melga e  $l$  es la lámina de agua infiltrada. La  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $J_o$  es la pendiente topográfica y  $J$  es la pendiente de fricción que puede ser determinada por la siguiente ley fractal de resistencia hidráulica (C. Fuentes *et al.*, 2004).

$$q = kv \left( \frac{h^3 Jg}{v^2} \right)^d \quad (3)$$

donde  $v$  es el coeficiente de viscosidad cinemática,  $k$  es un factor adimensional que incluye los efectos de la rugosidad de la superficie del suelo, y  $d$  es un exponente tal que  $1/2 \leq d \leq 1$  de tal manera que  $d = 1/2$  corresponde al régimen turbulento de Chézy y  $d = 1$  al régimen de Poiseuille.

### Flujo subsuperficial

Los dos métodos para calcular la infiltración acumulativa son la ecuación empírica de Kostiakov y la ecuación de Green y Ampt. La ecuación de Kostiakov se describe como sigue (Kostiakov, 1932):

$$I = \kappa \tau^\alpha \quad (4)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de oportunidad,  $\kappa$  y  $\alpha$  son los parámetros empíricos de infiltración.

Mientras que la ecuación de Green y Ampt (Green y Ampt, 1911), se establece a partir de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy, con las siguientes suposiciones: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme  $\theta = \theta_0$ ; (b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática:  $\psi = h \geq 0$ , donde  $h$  es la profundidad del agua; (c) hay un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa:  $\psi = -h_f < 0$ , donde  $h_f$  es la succión en el frente de humedecimiento; y (d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento está completamente saturado (flujo en pistón):  $\theta = \theta_s$  y  $K = K_s$ , donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación, es decir, el valor de la conductividad hidráulica de la ley de Darcy correspondiente al contenido volumétrico de humedad a saturación.

$$I = K_s t + \lambda \ln\left(1 + \frac{I}{\lambda}\right), \quad \lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_0) \quad (5)$$

donde  $t$  es el tiempo.

En la discretización de las ecuaciones (1) y (2), se utiliza un esquema de celdas oblicuas en diferencias finitas para su resolución (S. Fuentes, Fuentes, *et al.*, 2022; Saucedo *et al.*, 2005). La forma discretizada de las ecuaciones y su respectivo método de solución se encuentra bien detallado en (S. Fuentes, Chávez, *et al.*, 2022).

### Representación analítica del gasto óptimo de riego

La representación analítica del gasto óptimo de riego es función de la longitud de la melga, las propiedades hidrodinámicas y las constantes de humedad del suelo para obtener valores altos del coeficiente de uniformidad (C. Fuentes y Chávez, 2020):

$$q_{opt} = \alpha_u K_s L, \quad \alpha_u = \frac{\ell_n}{\ell_n - \frac{S^2}{2K_s} \ln\left(1 + \frac{2K_s}{S^2} \ell_n\right)} \quad (6)$$

Se observa que el gasto mínimo de riego para que el agua llegue al final de la melga está dado por  $q_m = K_s L$ , donde  $S$  es la sorbilidad del medio poroso expresado por  $S^2 = 2K_s h_f (\theta_s - \theta_0)$ ,  $L$  es la longitud de la melga y  $\ell_n$  es la lámina de riego neta.

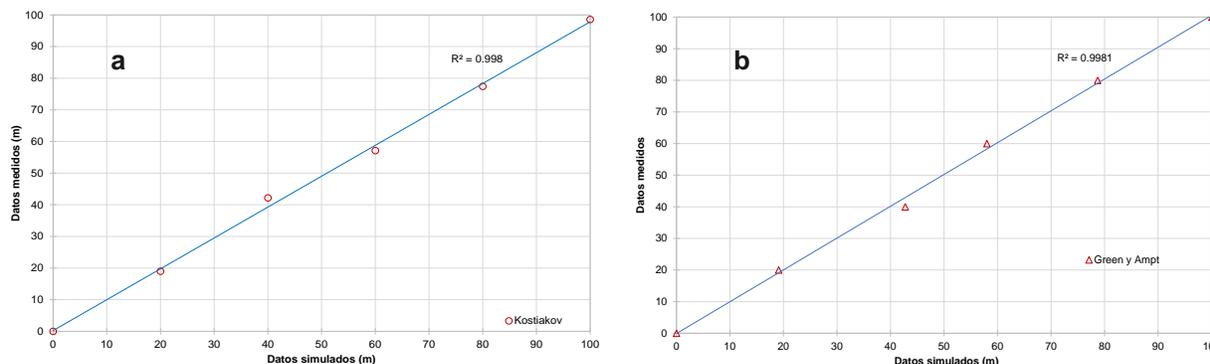
## Resultados y Discusión

### La prueba de riego

Se tomaron datos experimentales de la fase de avance de una prueba de riego en una melga cerrada de un suelo franco (Saucedo *et al.*, 2005). La longitud de la melga en este experimento es de  $L = 100$  m y el gasto durante el riego fue de  $q_0 = 0.0032$  m<sup>3</sup>/s/m. La pendiente topográfica fue  $J_0 = 0.002$  m/m y el parámetro adimensional  $\beta = 0$ . Se utilizó el valor de  $d = 1$  para la ley de resistencia hidráulica y se consideraron  $\theta_0 = 0.2749$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> y  $\theta_s = 0.4865$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>. Con el fin de optimizar los parámetros faltantes en las funciones de infiltración y mantener la similitud en las funciones de infiltración, se consideró un tirante normal  $h_0 = 2$  cm.

Los parámetros optimizados mediante el método de Levenberg-Marquardt (Moré, 1978) fueron  $\kappa = 5.9926$  cm/h <sup>$\alpha$</sup>  y  $\alpha = 0.5271$  para la ecuación de Kostiakov, mientras que en la ecuación de Green y Ampt se obtuvieron  $K_s = 1.54$  cm/h y  $h_f = 38.00$  cm.

Las comparaciones entre el avance de riego observado y simulados con los modelos se pueden observar en la Figura 1. Los valores del coeficiente  $R^2$  tomando en cuenta la ecuación de Kostiakov (Figura 1-a) fue de 0.998, mientras que con Green y Ampt (Figura 1-b) se obtuvo un valor de 0.9981, con lo que se demuestra que a pesar de tener poca diferencia, la ecuación de Green y Ampt ajusta mejor a los datos medidos en campo, gracias a la intervención de parámetros de base física en la ecuación.



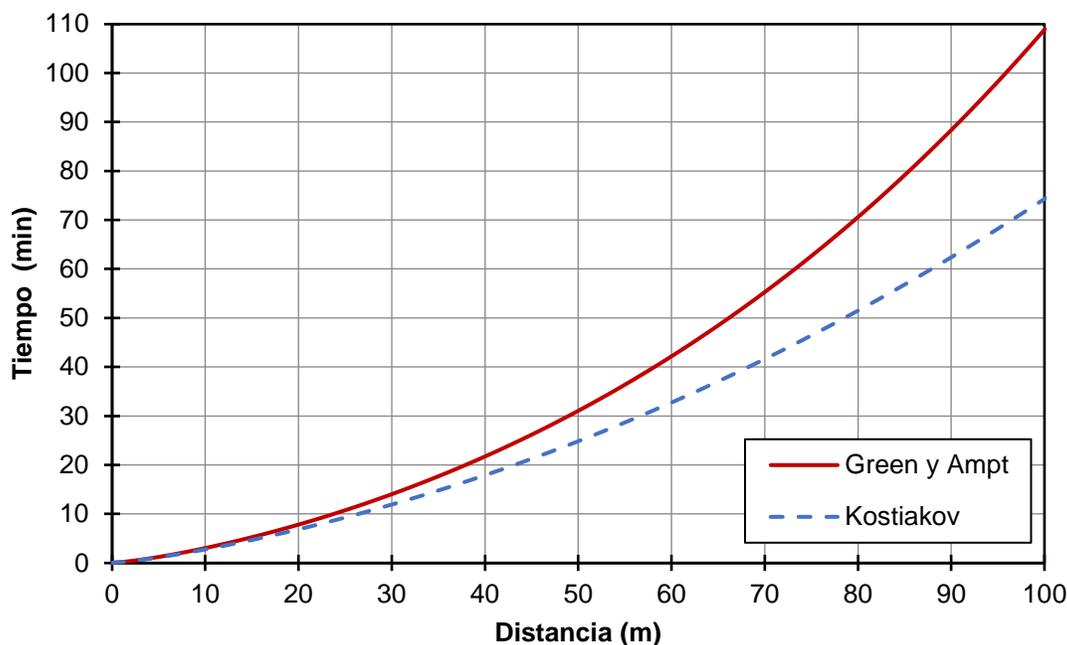
**Figura 1.** Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados.

### Riego subsecuente

Debido a los procesos de evaporación y transpiración del cultivo, el contenido de humedad se redistribuye en el perfil del suelo. La suma de los dos primeros procesos, que son también pérdidas de humedad, se conoce como evapotranspiración, que depende principalmente de la etapa fenológica en la que se encuentre el cultivo y las condiciones climáticas de la zona. Con esta información, es posible calcular la lámina de

riego neta necesaria para obtener un desarrollo óptimo de los cultivos (Allen *et al.*, 1998). A partir de los procesos de redistribución y evapotranspiración que ocurren desde el momento del primer riego, hasta el siguiente (de acuerdo con el calendario de riego), se hace necesario calcular la lámina de riego necesaria para satisfacer las necesidades del cultivo en la etapa fenológica en la que se encuentre y con esto, modificar el gasto de entrada en la parcela para obtener una distribución uniforme de la lámina de riego a lo largo de la melga (S. Fuentes, Chávez, *et al.*, 2022).

Para verificar que tanto influyen las ecuaciones de infiltración utilizadas en el riego por melgas, se realizó una simulación tomando en cuenta que el contenido de humedad inicial difiere al utilizado en la prueba de riego, el nuevo  $\theta_o = 0.1285 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  y considerando que se requiere  $\ell_n = 12 \text{ cm}$ , de acuerdo con la ecuación (6) se obtiene un  $q_{\text{opt}} = 0.001511 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ . La Figura 2 representa las diferencias entre las curvas de avance simuladas para las dos funciones de infiltración empleadas en este trabajo. Esta variación puede atribuirse a que la ecuación de Kostiakov no es una función de parámetros físicos del suelo, como el contenido de humedad inicial, en contraste con la ecuación de Green y Ampt, la cual sí incorpora este parámetro en el flujo subsuperficial del agua.



**Figura 2.** Curvas de avance para las dos ecuaciones de infiltración en un segundo riego.

Cuando el frente de onda de ambos modelos alcanza la parte final de la melga, los perfiles de infiltración son completamente diferentes (Figura 3) debido a los parámetros físicos del suelo que cambiaron con respecto al primer riego. También se observa que las frentes de onda llegan al final en momentos diferentes, debido a que la humedad del suelo modifica la velocidad del perfil de frente de onda, lo que genera un tiempo de contacto más prolongado del agua con el suelo y resulta en una mayor infiltración. Realizando un

análisis del caudal de entrada y el tiempo de riego, las profundidades promedio infiltradas en el perfil del suelo fueron de 6.75 cm para Kostiakov y 9.88 cm para Green y Ampt. Este resultado conduce a un déficit de humedad para el cultivo establecido de 3.13 cm, lo que equivale al 31.65% en relación con el agua requerida por el cultivo si se utiliza la ecuación de Kostiakov para aplicar el segundo riego.

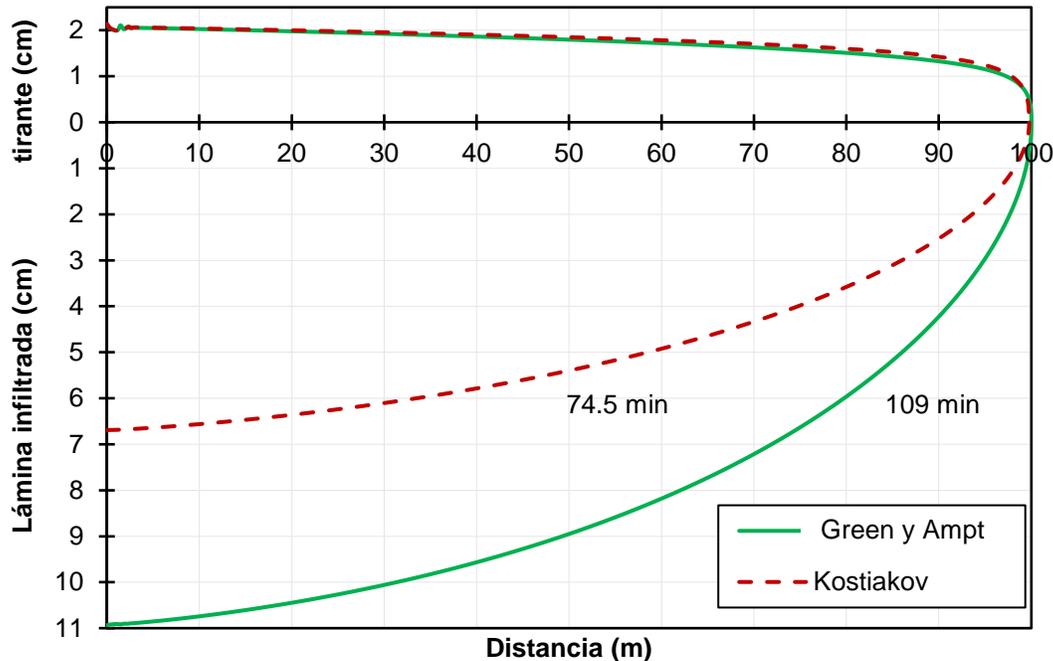


Figura 3. Tirante e infiltración en el extremo de la melga.

Es fundamental determinar los requerimientos de riego del cultivo y los momentos adecuados para su aplicación con el fin de cubrir las necesidades de la lámina de riego de los cultivos establecidos en las parcelas, ya que la variación del contenido de humedad en el suelo es un factor limitante para el desarrollo y rendimiento de éstos en la agricultura (Du *et al.*, 2021). El contenido de humedad inicial determina el tiempo de riego, el gasto óptimo de riego y la lámina de riego que se debe suministrar en la parcela para llevar el suelo a su capacidad de campo (C. Fuentes y Chávez, 2020).

## Conclusiones

La simulación permite deducir que, al modificar el contenido de humedad inicial, el gasto en la entrada de la parcela y las láminas de riego se modifican, lo que causa déficits o excesos de agua necesarios para el cultivo establecido. Por esta razón, se considera importante calcular eficientemente el gasto óptimo de riego, que depende de la longitud de la melga, la lámina de riego neta por aplicar, el contenido de humedad y los parámetros de la ecuación de infiltración a utilizar. Estos resultados permiten recomendar que la mejor ecuación para el diseño y modelado del riego por melgas es la ecuación de Green y Ampt, que se basa en parámetros físicos del suelo. En casos donde no se disponga de toda la información requerida por el modelo, se puede consultar bibliografía especializada

que recomienda valores promedio para un diseño eficiente basado en la textura del suelo (Saucedo *et al.*, 2015).

## Referencias Bibliográficas

- Akbari, M., Gheysari, M., Mostafazadeh-Fard, B., y Shayannejad, M. (2018). Surface irrigation simulation-optimization model based on meta-heuristic algorithms. *Agricultural Water Management*, 201, 46–57. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2018.01.015>
- Allen, R. G., Pereira, L. S., Raes, D., y Smith, M. (1998). Crop Evapotranspiration-Guidelines for Computing Crop Water Requirements-FAO Irrigation and Drainage Paper 56. *Fao, Rome*, 300(9), D05109.
- Chávez, C., y Fuentes, C. (2019). Design and evaluation of surface irrigation systems applying an analytical formula in the irrigation district 085, La Begoña, Mexico. *Agricultural Water Management*, 221, 279–285. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2019.04.027>
- Du, K., Qiao, Y., Zhang, Q., Li, F., Li, Q., Liu, S., y Tian, C. (2021). Modeling Soil Water Content and Crop-Growth Metrics in a Wheat Field in the North China Plain Using RZWQM2. *Agronomy*, 11(6), 1245. <https://doi.org/10.3390/agronomy11061245>
- Ebrahimian, H., y Liaghat, A. (2011). Field evaluation of various mathematical models for furrow and border irrigation systems. *Soil and Water Research*, 6(No. 2), Article No. 2. <https://doi.org/10.17221/34/2010-SWR>
- Fuentes, C., y Chávez, C. (2020). Analytic Representation of the Optimal Flow for Gravity Irrigation. *Water*, 12(10), Article 10. <https://doi.org/10.3390/w12102710>
- Fuentes, C., de León, B., Parlange, J.-Y., y Antonino, A. C. D. (2004). Saint-Venant and Richards equations system in surface irrigation: (1) Hydraulic resistance power law. *Ingeniería Hidráulica en México*, 19, 65–75.
- Fuentes, S., Chávez, C., Brambila-Paz, F., y Trejo-Alonso, J. (2022). Hydrodynamic Border Irrigation Model: Comparison of Infiltration Equations. *Water*, 14(13), 2111. <https://doi.org/10.3390/w14132111>
- Fuentes, S., Fuentes, C., Saucedo, H., y Chávez, C. (2022). Border Irrigation Modeling with the Barré de Saint-Venant and Green and Ampt Equations. *Mathematics*, 10(7), 1039. <https://doi.org/10.3390/math10071039>
- Gillies, M. H., y Smith, R. J. (2015). SISCO: Surface irrigation simulation, calibration and optimisation. *Irrigation Science*, 33(5), Article 5. <https://doi.org/10.1007/s00271-015-0470-8>
- Golestani Kermani, S., Sayari, S., Kisi, O., y Zounemat-Kermani, M. (2019). Comparing data driven models versus numerical models in simulation of waterfront advance in furrow irrigation. *Irrigation Science*, 37(5), 547–560. <https://doi.org/10.1007/s00271-019-00635-5>
- Green, W. H., y Ampt, G. A. (1911). Studies on Soil Physics I: The flow of air and water through soils. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), Article 1.
- Khasraghi, M. M., Sefidkouhi, M. A. G., y Valipour, M. (2015). Simulation of open- and closed-end border irrigation systems using SIRMOD. *Archives of Agronomy and Soil Science*, 61(7), Article 7. <https://doi.org/10.1080/03650340.2014.981163>

- Kostiakov, A. N. (1932). On the dynamics of the coefficient of water percolation in soils and the necessity of studying it from the dynamic point of view for the purposes of amelioration. *Trans. Sixth Comm. Int. Soc. Soil Sci.*, 1, 7–21.
- Moré, J. J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory. En *Numerical Analysis* (pp. 105–116). Springer. <http://link.springer.com/10.1007/BFb0067700>
- Saucedo, H., Fuentes, C., y Zavala, M. (2005). The Saint-Venant and Richards equation system in surface irrigation: (2) Numerical coupling for the advance phase in border irrigation. *Ingeniería Hidráulica en México*, 20(2), Article 2.
- Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. (2015). Border irrigation design with the Saint-Venant and Green & Ampt equations. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 6(5), 103–112.
- Singh, V., y Bhallamudi, S. M. (1996). Complete Hydrodynamic Border-Strip Irrigation Model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122(4), Article 4. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1996\)122:4\(189\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1996)122:4(189))
- Walker, W. R. (2003). *SIRMOD III: Surface irrigation simulation, evaluation and design-Guide and Technical Documentation*. Utah State University.